UDK: 681.511.2:517.938(047)=861
COSATI: 14-02, 14-07

Generalisane inverzije u teoriji i primenama kod linearnih singularnih sistema automatskog upravljanja

II deo: Primena u dinamičkoj analizi singularnih sistema

Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž [1)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž. [2)]
Vesna Drakulić, dipl.inž. [1)]

Singularni sistemi predstavljeni su u matematičkom smislu kombinacijom diferencijalnih i algebraskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje koje opšte rešenje, mora da zadovolji u svakom trenutku. Primera singularnih sistema ima skoro u svim granama nauke i tehnike. Javljaju se često u elektromagnetnim kolima, dinamici robota i savremenih letelica, optimizacionim problemima i kao granični slučaj singularno-perturbovanih sistema. Dinamička analiza ove klase sistema u vremenskom domenu podrazumeva poznavanje rešenja sistema diferencijalno-algebarskih jednačina. Zbog specifičnosti koje nosi sa sobom matrični zapis ovih sistema, neophodno je primeniti nestandardne inverzije odgovarajućih matrica. Ovi postupci pozanati su u literaturi kao generalisane ili pseudoinverzije. Imajući u vidu obimnost ove problematike, celokupni prikaz ovog problema podeljen je u dva dela. U prvom delu radu izložene su matematičke osnove pseudoinverzija a u drugom njihova primena u rešavanju linearnog singularnog sistema jednačina. Izložene procedure propraćene su odgovarajućim primerima.

Ključne reči: **Linearni sistemi, singularni sistemi, generalisane inverzije, Moore-Penroseova inverzija, Drazinova inverzija.**

Uvod

PREDMET narednih proučavanja je primena *Moore-Penroseove* i *Drazinove inverzije* na određivanje kretanja linearnih singularnih sistema.

Posmatra se sistem dat jednačinama:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

gde je $E, A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ i rang $E = q < n$.

Zatvoreni oblik rešenja linearnih regularnih vremenski neprekidnih singularnih sistema: prilaz s pozicija primene Moore-Penroseove inverzije

Bez gubitka opštosti, može se pretpostaviti da matrice A i E imaju oblik:

$$E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Neka je W_k potprostor konzistentnih početnih uslova, *Owens, Debeljković (1985)* za sistem u slobodnom radnom režimu $E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, dat sekvencom u *Lemi1*.Tada je matrični par (E,A) regularan ako, i samo ako je: $\aleph(E) \cap W_k = 0$, kako je pokazano u *Lemi1*.

Lema 1. Neka je $\aleph(E) \cap W_k = 0$ i $\dim W_k = 1$, *Owens, Debeljković (1985).*

Teorema 1. Neka je matrica $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T$, gde je $V_1 \in \mathbf{R}^{q\times 1}$ i $V_2 \in \mathbf{R}^{(n-q)\times 1}$, takva da kolone matrice V formiraju bazu prostora W_k.

Neka je, dalje, matrica $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^T$, gde je Q_1 takva matrica koja zadovoljava uslov $Q_1V_1 = I_1$, a sa matricom Q_2 koja formira bazu skupa $\left\{\mathbf{q}^T \mid \mathbf{q}^T V_1 = \mathbf{0}\right\}$.

Tada je:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} Q_2[A_1 & A_2] \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = n-1 \tag{3}$$

Dokaz: Pošto je:

$$\aleph\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix} V_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = E\,W_k \tag{4}$$

onda je:

$$\begin{aligned} &\dim\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}\Re(A)\right) = \dim\Re(A) - \\ &-\dim\left(\Re(A) \cap \aleph\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}\right)\right) = \\ &= \dim\Re(A) - \dim(\Re(A) \cap E\,W_k) \end{aligned} \tag{5}$$

1) Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
2) Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

Koristeći definiciju potprostora W_k iskazanu *Lemom1,* ima se:

$$\begin{aligned}&\dim(A^{-1} (E W_k)) = \\ &= \dim(\aleph(A)) + \dim(\Re(A) \cap E W_k) = \dim(W_k)\end{aligned} \tag{6}$$

Kombinujući jed. (5) i jed. (6), ima se:

$$\begin{aligned}&\dim\left(\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q}\end{bmatrix}\right)\Re(A)\right) = \\ &= \dim\Re(A) - \dim(\Re(A) \cap E W_k) = \\ &= \dim\Re(A) - \dim(W_k) + \dim\aleph(A) = \text{n} - \dim(W_k) = \text{n}-1\end{aligned} \tag{7}$$

Na kraju se dobija:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} Q_2[A_1 & A_2] \\ A_3 & A_4\end{bmatrix} = \dim\left(\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-k}\end{bmatrix}\right)\Re(A)\right) = \text{n} -1 \tag{8}$$

Kako je $\aleph(E) \cap W_k = \{0\}$, to je rang$(V_1^T) = 1$, pa uvek postoji matrica Q_1 takva da je $Q_1 V_1 = I_1$. Takođe, rang Q_2 = = $\dim\aleph(V_1^T) = q - 1$, što je i trebalo pokazati, *Dias, Mesquita (1990).*

Slobodni radni režim

Posmatra se sistem, dat jed. (1), u *slobodnom radnom režimu*.

Za nekonzistentne početne uslove, singularni sistem u slobodnom radnom režimu ima impulsno ponašanje. Ovde se razmatraju samo glatka rešenja generisana za pripadajuće *konzistentne početne uslove regularnog singularnog sistema.*

Teorema 2. Neka je $\aleph(E) \cap W_k = 0$, a Q_1, A_1, A_2 i V = $=\begin{bmatrix} V_1 & V_2\end{bmatrix}^T$ kao je dato u *Lemi 1*. Tada je:

$$\mathbf{x}(t) = V\,\mathbf{f}(t) \tag{9}$$

gde je:

$$\mathbf{f}(\text{t}) = e^{Q_1[A_1 \;\; A_2]Vt}\,\mathbf{f}(0), \quad \text{t} \geq 0 \tag{10}$$

konzistentno rešenje sistema.

Dokaz: Zamenjujući jed.(9) u jed. (1), ispisanu za slobodni radni režim, dobija se:

$$EV\dot{\mathbf{f}}\,(\text{t}) = Av\mathbf{f}(\text{t}) \tag{11}$$

što je ekvivalentno sa:

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2\end{bmatrix}\dot{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2\end{bmatrix}\mathbf{f}(t) \tag{12}$$

Na osnovu toga, jed.(9) će biti rešenje sistema (1), u slobodnom radnom režimu, ako važi:

$$V_1\dot{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2\end{bmatrix} V\mathbf{f}(t) \tag{13}$$

Pomnožimo gornji izraz matricom *Q s leva*. Na osnovu osobina matrica Q_1 i Q_2 datih u *Lemi1*, imamo da:

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = Q_1\begin{bmatrix} A_1 & A_2\end{bmatrix} V\mathbf{f}(t) \tag{14}$$

$$Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2\end{bmatrix} V\,\mathbf{f}(t) = 0 \tag{15}$$

Uslov, dat jed. (15) je zadovoljen za svako $\mathbf{f}(t)$, jer je:

$$V\,\mathbf{f}(t) \in W_k,\ \forall\mathbf{f}(t) \tag{16}$$

pošto matrica V reprezentuje bazu prostora W_k. Na osnovu prethodnog izraza i *Leme 1,* dobija se:

$$AV\,\mathbf{f}(t) \in A\,W_k \subset E\,W_k \tag{17}$$

Na bazi *Leme1:*

$$AV\,\mathbf{f}(t) \in \begin{Bmatrix} V_1 \\ 0\end{Bmatrix} = \aleph\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q}\end{bmatrix}\right) \tag{18}$$

Onda je:

$$\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix} V\,\mathbf{f}(t) = \mathbf{0},\ \forall\mathbf{f}(t) \tag{19}$$

Konačno se dobija:

$$Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2\end{bmatrix} V\,\mathbf{f}(t) = \mathbf{0},\ \forall\mathbf{f}(t) \tag{20}$$

Funkcija $\mathbf{f}(t)$ se može dobiti iz jed.(14) kao:

$$\mathbf{f}(t) = e^{Q_1[A_1 \;\; A_2]Vt}\,\mathbf{f}(0) \tag{21}$$

uz:

$$\mathbf{f}(0) \in \mathbf{R}^1, \quad 1 = \dim(W_k) \tag{22}$$

Dias, Mesquita (1990).

Prinudni radni režim

Posmatramo kontinualan singularni sistem u prinudnom radnom režimu dat jed. (1) sa sistemskim matricama datim jed.(2).

Ako je $\det(A_4) \neq 0$, konzistentno rešenje sistema, datog jed. (1) zahteva jedino kontinualan vektor ulaza $\mathbf{u}(t)$. U suprotnom, ako je $\det(A_4) = 0$, konzistentno rešenje zahteva da vektor ulaza bude diferencijabilan, tj. $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{C}^{\text{p}}$, za neko p≥1, definisano jed. (32).

Prirodno je da se konzistentna rešenja sistema, datog jed. (1) potraže u obliku:

$$\mathbf{x}(t) = V\,\mathbf{f}(t) + \sum_{i=0}^{p-1} L_i\mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{23}$$

U nastavku se izlažu neka preliminarna razmatranja, neophodna za formulciju glavnog rezultata.

Pretpostavljajući da je matrični par (E, A) regularan i da je $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{C}^{\text{p}}$, iz jed. (23) sledi:

$$\begin{aligned}E\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} V_1 \\ 0\end{bmatrix}\dot{\mathbf{f}}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} EL_i\mathbf{u}^{(i+1)}(t) = \\ &= AV\mathbf{f}(t) + (A\,L_0 + B)\mathbf{u}(t) + \sum_{i=0}^{p-1} AL_i\mathbf{u}^{(i)}(t)\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Iz prethodne jednačine, dobija se:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} V_1 \\ 0\end{bmatrix}\dot{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix} V\,\mathbf{f}(t) + \\ &+\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix} L_0 + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2\end{bmatrix}\right)\mathbf{u}(t) + \\ &+\sum_{1=1}^{p-1}\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix} L_i - \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} L_{i-1}\right)\mathbf{u}^{(i)}(t) -\end{aligned} \tag{25}$$

$$-\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L_{p-1}\mathbf{u}^{(p)}(t)$$

Da bi prethodna jednačina bila zadovoljena, potrebno je da:

$$\left(\begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} L_0 + B_2\right)\mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^{p-1}\begin{bmatrix} A_3 & A_3 \end{bmatrix} L_i \mathbf{u}^{(i)}(t) \equiv 0 \qquad (26)$$

bude zadovoljeno za svako $t\in[0, +\infty)$, ili što je ekvivalentno sa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} L_0 + B_2 &= 0 \\ \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} L_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} L_{p-1} &= 0 \end{aligned} \qquad (27)$$

Neka je $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^T$ kao što je definisano u *Lemi1.* Množeći *s leva,* prvih q jednačina izraza datog jed. (25), matricom Q, dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}(t) &= Q_1\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} V \ \mathbf{f}(t) + (Q_1\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} L_0 + \\ &+ Q_1 B_1 \mathbf{u}(t)) + \sum_{i=0}^{p-1}(Q_1\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} L_i - Q_1\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{i-1})\mathbf{u}(t) - \\ &- Q_1\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{p-1}\mathbf{u}^{(p)} \end{aligned} \qquad (28)$$

i

$$\begin{aligned} & Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} V\,\mathbf{f}(t) + (Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} L_0 + Q_2 B_1)\,\mathbf{u}(t) + \\ & + \sum (Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} L_i - Q_2\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{i-1})\mathbf{u}^{(i)}(t) - \\ & - Q_2\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{p-1}\mathbf{u}^{(p)} \equiv 0 \end{aligned} \qquad (29)$$

iz koje se dobija:

$$\begin{aligned} & Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} V\,\mathbf{f}(t) = 0 \\ & Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} L_0 + Q_2 B_1 = 0 \\ & \vdots \\ & Q_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} L_{p-1} - Q_2\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{p-2} = 0 \\ & Q_2\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{p-1} = 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

Prva jednačina prethodnog sistema treba da bude zadovoljena za proizvoljno $\mathbf{f}(t)$. Kombinujući jed. (27) sa jed. (30) dobija se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Q_2[A_1 & A_2] \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} L_0 = -\begin{bmatrix} Q_2 B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ & \vdots \\ & \begin{bmatrix} Q_2[A_1 & A_2] \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} L_{p-1} = \begin{bmatrix} Q_2\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} L_{p-2} \\ & Q_2\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} L_{p-1} = 0 \end{aligned} \qquad (31)$$

Po *Lemi1,* L_i je rešenje svake i-te jednačine sistema, datog jed. (31), za i = 0, 1, …, p −1, a poslednji izraz definiše stepen diferencijabilnosti vektorske funkcije ulaza $\mathbf{u}(t)$.

Pošto je:

$$Q_2\begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} L_{p-1} = 0 \qquad (32)$$

onda:

$$\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L_{p-1} = 0 \qquad (33)$$

ili:

$$E\,L_{p-1} \subset \aleph\left(\begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\right) = E\,W_k \qquad (34)$$

pa je:

$$\Re(L_{p-1}) \subset \aleph(E) + W_k \qquad (35)$$

Na osnovu toga, algoritam se završava kada se nađe L_i koja zadovoljava jed.(35).

Koeficijenti L_i se mogu izračunati koristeći *Moore-Penroseovu generalisanu inverziju* kao:

$$L_0 = -\begin{bmatrix} Q_2[A_1 & A_2] \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{\#}\begin{bmatrix} Q_2 B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} Q_2[A_1 & A_2] \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{\#}\begin{bmatrix} Q_2\begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} L_{i-1} \qquad (37)$$

i = 0, 1, …, p −1

Prethodni rezultat je sumiran u sledećoj teoremi:

Teorema 3. Neka je $\aleph(E) \cap W_k = 0$ i $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{C}^p$. Tada, ako su $\mathbf{f}(t)$ i L_i definisani jed. (28,36 i 37) onda je:

$$\mathbf{x}(t) = V\,\mathbf{f}(t) + \sum_{i=0}^{p-1} L_i \mathbf{u}^{(i)}(t) \qquad (38)$$

konzistentno rešenje regularnog sistema, datog jed. (1).

Dokaz. Dokaz je praktično oličen u svim prethodnim izvođenjima, pa se stoga ovde smatra izlišnim, *Dias, Mesquita (1990).*

Kao posledica *Teoreme 3,* $\mathbf{x}(0)$ je konzistentni početni uslov ako važi:

$$\mathbf{x}(0) = V\,\mathbf{f}(0) + \sum_{i=0}^{p-1} L_i \mathbf{u}^{(i)}(0) \qquad (39)$$

Za svako $\mathbf{u}(t)\in\mathbf{C}^p$, jed.(39) definiše konzistentne početne uslove sistema, datog jed. (1).

Primetimo da, u slučaju da je $W_k = 0$, matrica Q se svodi na jediničnu matricu reda q a po *Lemi 1*, tada je matrica A regularna matrica, pa se rešenje pojednostavljuje:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} L_i \mathbf{u}^{(i)}(t) \qquad (40)$$

uz:

$$\begin{aligned} & L_0 = -A^{-1}B \\ & L_i = A^{-1}EL_{i-1}\ , \ \mathrm{i} = 0, 1, \ldots, \mathrm{p} - 1 \\ & EL_{p-1} = 0 \end{aligned} \qquad (41)$$

U opštem slučaju, za proizvoljan par ($\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$), za koji je sistem, dat jed. (1), rešljiv, odgovarajući početni vektor $\mathbf{f}(0)$ se dobija iz jed. (23) kao:

$$\mathbf{f}(0) = V^{\#}\,[\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{p-1} L_i \mathbf{u}^{(i)}(0)\,] \tag{42}$$

Prethodni rezultati omogućavaju iznalaženje kretanja singularnog sistema u prostoru stanja.

Zatvoreni oblik rešenja linearnih regularnih vremenski neprekidnih singularnih sistema: prilaz s pozicija primene Drazinove inverzije

Razmatraju se rešenja singularnog sistema diferencijalnih jednačina samo kada su matrice E i A kvadratne. Iznose se rezultati dati u radu *Campbell (1980b).*

Slobodni radni režim

Za ova razmatranja pogodno je singularni sistem, dat u uobičajenoj formi, prikazati kao:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) + A\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{43}$$

Definicija 1. Neka matrice $E, A \in \mathrm{C}^{n\times n}$ i $t_0 \in \mathbf{R}$. Vektor $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ naziva se *konzistentni početni vektor* pridružen trenutku t_0 ako jed. (43) ima najmanje jedno rešenje. Jed. (43) je *traktabilna** u trenutku t_0, ako ima jedinstveno rešenje za svaki konzistentni početni vektor $\mathbf{x}$, pridružen trenutku t_0.

Ako je homogena jednačina $E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *traktabilna* u nekom trenutku $t_0 \in \mathbf{R}$, onda je ona traktabilna u svakom trenutku $t \in \mathbf{R}$, pa se jednostavno kaže da je ona *traktabilna*.

Lema 2. Neka su matrice $E, A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Pretpostavimo da postoji broj $\lambda \in \mathbf{C}$ takav, da matrica $(\lambda E + A)^{-1}$ postoji, i neka su:

$$\hat{E}_\lambda = (\lambda E + A)^{-1} E, \quad \hat{A}_\lambda = (\lambda E + A)^{-1} A \tag{44}$$

Tada je:

$$\hat{A}_\lambda = I - \lambda \hat{E}_\lambda \tag{45}$$

i stoga:

$$\hat{E}_\lambda \hat{A}_\lambda = \hat{A}_\lambda \hat{E}_\lambda \tag{46}$$

Teorema 4. Za $E, A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, homogena algebro - diferencijalna jed, (43) je *traktabilna* ako, i samo ako postoji skalar $\lambda \in \mathrm{C}$, takav da postoji matrica $(\lambda E + A)^{-1}$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathrm{C}$, takav da je matrični par $(\lambda E{+}A)$ regularan, tj. da postoji matrica $(\lambda E + A)^{-1}$. Neka važi jed. (44). Tada je jed. (43) *traktabilna* ako, i samo ako je jednačina:

$$\hat{E}_\lambda \dot{\mathbf{x}}(t) + \hat{A}_\lambda \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{47}$$

traktabilna.

Može se pokazati da uvek postoji nesingularna matrica transformacije T takva, da:

$$T^{-1}\,\hat{E}\,T = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$T^{-1}\hat{A}T = T^{-1}(I - \lambda\,\hat{E})T = \begin{bmatrix} I - \lambda Q_0 & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix} \tag{49}$$

gde je Q_0 obavezno regularna, a N nilpotentna matrica sa osobinom $N^\nu = 0$, gde je $\nu = \mathrm{Ind}\,(N)$.

Ako se uvede transformisani vektor stanja:

$$\mathbf{x}(t) = T\,\mathbf{y}(t) \tag{50}$$

polazna jednačina stanja preinačuje se u :

*Skladna, prilagodljiva, plemenita.

$$\begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I - \lambda Q_0 & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{51}$$

ili:

$$Q_0 \dot{\mathbf{y}}_1(t) + (I - \lambda Q_0)\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{0} \tag{52}$$

$$N\dot{\mathbf{y}}_2(t) + (I - \lambda N)\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{0} \tag{53}$$

Jed. (52) je *traktabilna* jer je Q_0 regularna matrica. Sada je potrebno pokazati i da jed. (53) ima istu osobinu.

Množeći jed. (53) prvo sa N^{k-1}, dobija se:

$$N^{k-1}\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{0} \tag{54}$$

a zatim sa N^{k-2} i:

$$N^{k-2}\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{0} \tag{55}$$

pa nastavljajući na isti način, dolazi se do zaključka da je i $\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{0}$, što znači da je i jed. (47) *traktabilna*. Ostali deo dokaza nije od interesa za ovo izlaganje.

U lit. *Campbell (1980b*), pokazano je da izneti rezultati ne zavise od izbora skalara λ, $\lambda \in \mathbf{C}$, koji figuriše u matrici $(\lambda E + A)^{-1}$, odnosno da λ može biti bilo koji broj koji nije koren jednačine $\det(\lambda E + A) = 0$.

Teorema 5. Neka je jed (43) *traktabilna*. Tada je njeno rešenje dato sa:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\hat{E}^D \hat{A}(t-t_0)}\hat{E}\hat{E}^D \mathbf{q}\ , \quad \mathbf{q} \in \mathbf{C}^n \tag{56}$$

Stanje $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}^n$ je konzistentno početno stanje za datu homogenu jednačinu ako, i samo ako je:

$$\mathbf{x}_0 = \hat{E}\hat{E}^D \mathbf{x}_0 \tag{57}$$

Dokaz. Koristeći *Teoremu 4* vidi se da sistem dat jed. (43) ima rešenje:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{-Q_0^{-1}(I-\lambda Q_0)(t-t_0)}\mathbf{d}_1 \tag{58}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{0}\ , \quad \mathbf{d}_1 \text{ je proizvoljno.} \tag{59}$$

Vraćanjem na početne promenljive, dobija se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= T\mathbf{y}(t) = \\ &= T\begin{bmatrix} e^{-Q_0^{-1}(I-\lambda Q_0)(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \\ &= e^{-\hat{E}^D \hat{A}(t-t_0)}\hat{E}\hat{E}^D \mathbf{x}_0\,, \end{aligned} \tag{60}$$

pri čemu su matrice $\hat{E}$ i $\hat{A}$ definisane jed. (44), a:

$$\mathbf{x}_0 = T\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^n \tag{61}$$

Prinudni radni režim

Teorema 2. Neka matrica $(\lambda E + A)$ ima inverznu matricu za neki skalar λ i neka je ulazna funkcija $\mathbf{u}(t)$ k-puta diferencijabilna u okolini početnog trenutka t_0. Tada nehomogena jednačina:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t)+A\mathbf{x}(t)=\mathbf{u}(t) \tag{62}$$

ima opšte rešenje:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=e^{-\hat{E}^D\hat{A}(t-t_0)}\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{q}+\\ &+e^{-\hat{E}^D\hat{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{\hat{E}^D\hat{A}\tau}\hat{E}^D\hat{\mathbf{u}}(\tau)\,d\tau+\\ &+(I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{A}^D\mathbf{u}^{(i)}(t)\end{aligned} \tag{63}$$

Označimo sa:

$$\mathbf{w}=(I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{A}^D\hat{\mathbf{u}}^{(i)}(t) \tag{64}$$

Vektor $\mathbf{w}$ je nezavisan od izbora λ. Stanje $\mathbf{x}_0$ je konzistentno početno stanje pridruženo $t_0 \in \mathbf{R}$ za nehomogenu jednačinu ako, i samo ako zadovoljava uslov:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)\big(\mathbf{x}_0-\mathbf{w}(0)\big)=\mathbf{0} \tag{65}$$

Nehomogena jed. (62) je *traktabilna* u trenutku t_0 i njeno jedinstveno rešenje, s početnim uslovom $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, dato je jed. (63), gde je $\mathbf{q}=\mathbf{x}_0$.

Dokaz. Neka je:

$$\mathbf{x}_1(t)=\hat{E}^De^{-\hat{E}^D\hat{A}t}\int_0^t e^{\hat{E}\hat{A}\tau}\hat{E}^D\hat{\mathbf{u}}(\tau)\,d\tau \tag{66}$$

$$\mathbf{x}_2(t)=(I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\hat{E}^i(\hat{A}^D)^{i+1}\hat{\mathbf{u}}^{(i)}(t) \tag{67}$$

gde je uzeto da je $t_0=0$, radi lakšeg zapisivanja. Pokažimo da važi sledeće:

$$\hat{E}\dot{\mathbf{x}}_1(t)+\hat{A}\mathbf{x}_1(t)=\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{u}(t) \tag{68}$$

$$\hat{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t)+\hat{A}\mathbf{x}_2(t)=\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\mathbf{u}(t) \tag{69}$$

Jednostavnim izračunavanjem dobija se:

$$\begin{aligned}\hat{E}\dot{\mathbf{x}}_1(t)&=\hat{E}\left(-\hat{E}^D\hat{A}\mathbf{x}_1(t)+\hat{E}^De^{-\hat{E}^D\hat{A}t}e^{\hat{E}^D\hat{A}t}\mathbf{u}(t)\right)\\ &=-\hat{E}\hat{E}^D\hat{A}\mathbf{x}_1(t)+\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{u}(t)\\ &=-\hat{A}\mathbf{x}_1(t)+\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{u}(t)\end{aligned} \tag{70}$$

i

$$\begin{aligned}\hat{E}\dot{\mathbf{x}}_2(t)&=\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\hat{E}\hat{A}^D)^{i+1}\hat{\mathbf{u}}^{(i+1)}(t)\\ &=\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\hat{A}\hat{A}^D\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-1}(\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{\mathbf{u}}^{(i)}(t)\\ &=\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\hat{A}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-1}\hat{E}^i(\hat{A}^D)^{i+1}\hat{\mathbf{u}}^{(i)}(t)\\ &=\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\hat{A}\left(-\mathbf{x}_2(t)+\hat{A}^D\hat{\mathbf{u}}(t)\right)\\ &=\hat{A}\mathbf{x}_2(t)+\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\hat{A}\hat{A}^D\hat{\mathbf{u}}(t)\\ &=-\hat{A}\mathbf{x}_2(t)+\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\hat{\mathbf{u}}(t)\end{aligned} \tag{71}$$

Prema tome, $\mathbf{x}_1(t)$ i $\mathbf{x}_2(t)$ su partikularna rešenja, što je i trebalo pokazati, a jed. (63) predstavlja opšte rešenje nehomogene jednačine, date jed. (62).

Treba primetiti da za traktabilnu homogenu jed. (62), vektor početnih uslova mora da zadovolji:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)\mathbf{x}_0=\mathbf{0} \tag{72}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathbf{x}_0\in\Re\left(\hat{E}^k\right) \tag{73}$$

Međutim, jasno je iz prirode procesa da jed. (72 i 73) važe za svako $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$.

Slično, za nehomogenu jednačinu, vektor početnih uslova zadovoljava:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)\big(\mathbf{x}_0-\mathbf{w}_0\big)=\mathbf{0} \tag{74}$$

odnosno:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)\big(\mathbf{x}(t)-\mathbf{w}(t)\big)=\mathbf{0} \tag{75}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$\big(\mathbf{x}(t)-\mathbf{w}(t)\big)\in\Re\left(\hat{E}^k\right),\quad\forall t \tag{76}$$

Jedan sasvim drugi prilaz određivanju kretanja singularnog sistema u prostoru stanja dao je *Dai (1989).* Naime, polazeći od *standardne kanoničke forme, regularnog singularnog sistema* u obliku:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t)=A_1\mathbf{x}_1(t)+B_1\mathbf{u}(t) \tag{77}$$

$$N\dot{\mathbf{x}}_2(t)=I\mathbf{x}_2(t)+B_2\mathbf{u}(t) \tag{78}$$

$$\mathbf{x}_i(t)=\mathbf{x}_{i1}(t)+\mathbf{x}_{i2}(t)=C_1\mathbf{x}_1(t)+C_2\mathbf{x}_2(t) \tag{79}$$

gde $\mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}(t)\in\mathbf{R}^m$, $\mathbf{x}_i(t)\in\mathbf{R}^p$, $\mathbf{x}_1(t)\in\mathbf{R}^{n_1}$, $\mathbf{x}_2(t)\in\mathbf{R}^{n_2}$, $n=n_1+n_2$, a matrica N je nilpotentna sa Ind $(N)=\nu$.

Valja primetiti da je dinamičko ponašanje "sporog" podsistema, jed. (77), opisano običnom diferencijalnom jednačinom, koja ima jedinstveno *rešenje* za bilo koje početne uslove $\mathbf{x}_1(0)$ i za bilo koju, u delovima neprekidnu funkciju $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{x}_1(t)=e^{A_1t}\mathbf{x}_1(0)+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{80}$$

Prema tome, $\mathbf{x}_1(t)$ je kompletno određeno sa $\mathbf{x}_1(0)$ i $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau\in[0,t]$.

Pretpostavimo dalje, da je ulazna funkcija $\mathbf{u}(t)$ ν puta diferencijabilna, u delovima neprekidna funkcija. Sukcesivno diferencirajući obe strane jed. (78) sa uporednim množenjem istih matricom N, dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} N\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= I\mathbf{x}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t), \\ N^2\ddot{\mathbf{x}}_2(t) &= N\dot{\mathbf{x}}_2(t) + NB_2\dot{\mathbf{u}}(t), \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ N^{\nu}\mathbf{x}_2^{(\nu)}(t) &= N^{\nu-1}\mathbf{x}_2^{(\nu-1)}(t) + N^{\nu-1}\mathbf{u}^{(\nu-1)}(t) \end{aligned} \tag{81}$$

Imajući u vidu da je $N^{\nu} = 0$ (nula matrica), iz poslednje jednačine dobija se:

$$\mathbf{x}_2(t) = -\sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{82}$$

Jed. (80 i 82) pokazuju dva interesantna fenomena. Naime, lako se iz jed. (80) vidi kumulativni efekat delovanja $\mathbf{u}(t)$, dok je taj efekat u jed. (82) trenutan zbog prisutnih vremenskih izvoda funkcije $\mathbf{u}(t)$. Time se i objašnjava uobičajeno proglašavanje da se “spori” deo sistema manifestuje kroz sistem jed. (77), a "brzi" deo kroz sistem jed. (78).

Numerički primeri

Neka je dat linearni singularni sistem svojim triplom *(E,A,B), Pavković (1998):*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prilaz sa pozicija Moore - Penroseove inverzije

Ovaj metod podrazumeva da je matrica E obavezno singularna i oblika:

$$E = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polazni sistem jednačina se, zbog toga, transformiše množenjem treće jednačine sa −1. Onda je:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu sekvence date u *Lemi, Owens, Debeljković (1985)*, određuje se potprostor W_k :

$$W_0 = \mathbf{R}^4 \ , \quad EW_0 = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dalje je:

$$W_1 = A^{-1}(EW_0) = \left\{ \mathbf{x} : A\mathbf{x} \in EW_0 \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{x} : A\mathbf{x} = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right.$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rešavanjem ove jednačine dobija se:

$$x_1 + x_4 = 0$$

pa je:

$$W_1 = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$EW_1 = span\left\{ E\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, E\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Kako je $EW_1 = EW_0$, onda je i $W_2 = W_1 = W_k$.

Matrica V je, po *Teoremi 1* takva, da njene kolone formiraju bazu prostora W_k , tj.:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; V_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^T$ je takva da je $Q_1V_1 = I_1$, a Q_2 je baza skupa $\left\{ \mathbf{q}^T \mid \mathbf{q}^T V_1 = \mathbf{0} \right\}$, tj:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Potprostor koji služi za određivanje dužine niza koeficijenata L_i je:

$$\aleph(E)+W_k=\mathbf{R}^4,\ \aleph(E)=span\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

To znači da će, za svaki L_i, $\Re(L_i)$ biti podskup tog prostora, pa algoritam staje već kod prvog koeficijenta L_0, koji je:

$$L_0=-\begin{bmatrix}Q_2[A_1 & A_2]\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}^{\#}\begin{bmatrix}Q_2B_2\\B_2\end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}^{\#}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&0.5\\0&0\\0&0\\0&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\0\\0\\0.5\end{bmatrix}$$

Očigledno,

$$\Re(L_0)=span\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\subset\mathbf{R}^n$$

pa algoritam staje uz $p=1$.

Sada je:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}}(t)&=Q_1\left[A_1\quad A_2\right]V\ \ \mathbf{f}(t)+Q_1\left[A_1\quad A_2\right]L_0+Q_1B_1\mathbf{u}(t))+\\&+\sum_{i=0}^{p-1}(Q_1\left[A_1\quad A_2\right]L_i-Q_1\left[I_k\quad 0\right]L_{i-1})\mathbf{u}^{(i)}(t)-\\&-Q_1\left[I_k\quad 0\right]L_{p-1}\mathbf{u}^{(p)}=Q_1\left[A_1\quad A_2\right]V\ \ \mathbf{f}(t)+\\&+(Q_1\left[A_1\quad A_2\right]L_0+Q_1B_1)h(t),\end{aligned}$$

jer je $\dot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{0}$, $\forall t>0$.

Zamenjujući vrednosti matrica Q, A, B i V u gornji izraz, dobija se:

$$\dot{\mathbf{f}}(t)=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\mathbf{f}(t)+\begin{bmatrix}0.5\\0\\0.5\end{bmatrix}h(t)$$

Homogeni deo rešenja gornjeg sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\mathbf{f}_h(t)=e^{Pt}\mathbf{f}_0$$

gde je:

$$P=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}_0=\begin{bmatrix}f_{10}\\f_{20}\\f_{30}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}0.5\\0\\0.5\end{bmatrix}$$

odnosno:

$$\mathbf{f}_h(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\ \frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)&\cos t&\sin t\\ \frac{1}{2}(-e^{-t}+\cos t+\sin t)&-\sin t&\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{10}\\f_{20}\\f_{30}\end{bmatrix}$$

Vektor $\mathbf{f}_0$ je određen sa:

$$\mathbf{f}(0)=\mathbf{f}_0=V^{\#}\left[\mathbf{x}(0)-\sum_{i=0}^{p-1}L_i\mathbf{u}^{(i)}(0)\right]=V^{\#}\left[\mathbf{x}(0)-L_0\mathbf{u}(0)\right]$$

gde je:

$$\mathbf{x}^T(0)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{u}(0)=1,$$

i

$$V^{\#}=\begin{bmatrix}0.5&0&0&-0.5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

pa je:

$$\mathbf{f}_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.5\\0\\0\\0.5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

Homogeni deo rešenja je:

$$\mathbf{f}_h(t)=e^{Pt}\mathbf{f}_0=\begin{bmatrix}-0.5e^{-t}\\-0.25(e^{-t}-\cos t+\sin t)\\0.25(e^{-t}-\cos t-2\sin t)\end{bmatrix}$$

Partikularno rešenje je:

$$\mathbf{f}_p(t)=e^{Pt}\int_0^t e^{-P\tau}Ru(\tau)d\tau$$

gde je:

$$e^{-P\tau}=\begin{bmatrix}e^{\tau}&0&0\\ \frac{1}{2}(e^{\tau}-\cos\tau-\sin\tau)&\cos\tau&-\sin\tau\\ \frac{1}{2}(-e^{\tau}+\cos\tau-\sin\tau)&\sin\tau&\cos\tau\end{bmatrix}$$

Podintegralna veličina je:

$$e^{-P\tau}Ru(\tau)=e^{-P\tau}\begin{bmatrix}0.5\\0\\0.5\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}0.5e^{\tau}\\ \frac{1}{4}(e^{\tau}-\cos\tau-3\sin\tau)\\ \frac{1}{4}(-e^{\tau}+3\cos\tau-\sin\tau)\end{bmatrix}$$

a njen integralni deo od 0 do t je:

$$\int_0^t e^{-P\tau} Ru(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} 0.5e^t - 0.5 \\ 1 + \frac{1}{4}(e^t - \sin t + 3\cos t) \\ -\frac{1}{4}(e^t - 3\sin t - \cos t) \end{bmatrix}$$

Pertikularno rešenje iznosi:

$$\mathbf{f}_p(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.5e^t \\ 1 - 0.25(e^{-t} + 3\cos t + \sin t) \\ 0.25(e^{-t} - \cos t + 3\sin t) \end{bmatrix}$$

Konačno rešenje je: $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_h(t) + \mathbf{f}_p(t)$, gde je:

$$f_1 = 0.5 - e^{-t}$$
$$f_2 = 1 - 0.5(e^{-t} + \cos t + \sin t)$$
$$f_3 = 0.5(e^{-t} - \cos t + \sin t)$$

Rešenje sistema je:

$$\mathbf{x}(t) = V\,\mathbf{f}(t) + \sum_{i=0}^{p-1} L_i u^{(i)} = V\,\mathbf{f}(t) + L_0\,\mathrm{h}(t)$$

što daje:

$$x_1(t) = f_1(t) + 0.5 = 1 - e^{-t}$$
$$x_2(t) = f_2(t) = 1 - 0.5(e^{-t} + \cos t + \sin t)$$
$$x_3(t) = f_3(t) = 0.5(e^{-t} - \cos t + \sin t)$$
$$x_4(t) = -f_1(t) + 0.5 = e^{-t}$$

Prilaz sa pozicija Drazinove inverzije

Ovaj prilaz podrazumeva predstavljanje singularnog sistema u sledećem matričnom zapisu:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) + A\mathbf{x}(t) = B\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

pa su stoga:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matrični par (E, A) je regularan, jer je:

$$\det(\lambda E + A) = -\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1$$

što nije identički jednako nuli. Ako izaberemo da je $\lambda = 0$, $\det(\lambda E + A) = 1 \neq 0$, onda se $(\lambda E + A)^{-1}$ pretvara u A^{-1}, gde je:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Takođe, $\hat{A} = A^{-1}A = I_4$ i:

$$\hat{E} = A^{-1}E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Drazinova inverzija matrice $\hat{E}$ je:

$$\hat{E}^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je:

$$\hat{E}\,\hat{E}^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \hat{E}^D\,\hat{A} = \hat{E}^D$$

Na osnovu ranijih rezultata, vektor $\mathbf{w}$ je:

$$\mathbf{w}(t) = (I - \hat{E}\,\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)(\hat{E}\hat{A}^D)^i\,\hat{A}^D\hat{B}\mathbf{u}^{(i)}(t)$$

Kako je $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{h}(t)$, vektor $\mathbf{w}$ je u početnom trenutku:

$$\mathbf{w}(0) = (I - \hat{E}\,\hat{E}^D)\,(\hat{E}\hat{A}^D)^0\,\hat{A}^D\hat{B}\cdot\mathbf{1}$$

gde je:

$$\hat{A}^D = \hat{A} = I$$

i

$$\hat{B} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pa je:

$$\mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konzistentni početni vektor $\mathbf{x}_0$ mora da zadovolji:

$$(I - \hat{E}\,\hat{E}^D)(\mathbf{x}(0) - \mathbf{w}(0)) = \mathbf{0},$$

tj:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{10}+x_{40}-1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Zaključuje se da je usvojeni početni vektor $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ konzistentan.

Homogeni deo rešenja je:

$$\mathbf{x}_h = e^{-\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}\hat{E}^D \mathbf{x}_0 \equiv 0 \,,$$

jer je:

$$\hat{E}\ \hat{E}^D\ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Prvi deo partikularnog rešenja je:

$$\mathbf{x}_{p1}(t) = (I - \hat{E}\ \hat{E}^D) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)(\hat{E}\hat{A}^D)^i \hat{A}^D \hat{B} \mathbf{u}^{(i)}(t) =$$

$$= \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jer je $\mathbf{w}(t)$ konstantan vektor, s obzirom na činjenicu da je $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{h}(t)$.

Drugi deo partikularnog rešenja je:

$$\mathbf{x}_{p2}(t) = e^{-\hat{E}^D \hat{A} t} \int_0^t e^{\hat{E}^D \hat{A}\tau} \hat{E}^D \hat{B} u(\tau) d\tau$$

$$\int_0^t e^{\hat{E}^D \hat{A}\tau} \hat{E}\hat{B} d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau} \\ 0.5(e^{\tau} - \cos\tau - \sin\tau) \\ -0.5(e^{\tau} - \cos\tau + \sin\tau) \\ -e^{\tau} \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} - 1 \\ 0.5(e^{t} + \cos t + \sin t) - 1 \\ -0.5(e^{t} - \cos t - \sin t) \\ -e^{-t} + 1 \end{bmatrix}$$

Nakon sređivanja dobija se:

$$\mathbf{x}_{p2}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ 1 - 0.5(e^{-t} + \cos t + \sin t) \\ 0.5(e^{-t} - \cos t + \sin t) \\ -1 + e^{-t} \end{bmatrix}$$

Kompletno rešenje je:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_{p1}(t) + \mathbf{x}_{p2}(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ 1 - 0.5(e^{-t} + \cos t + \sin t) \\ 0.5(e^{-t} - \cos t + \sin t) \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

što u potpunosti odgovara rešenju dobijenom Moore-Penroseovim prilazom, *Pavković (1998).*

Zaključak

Izložena su dva pristupa rešavanju singularnog sistema diferencijalno-algebarskih jednačina. U oba slučaja korišćene su pseudoinverzije kvadratnih matrica. Sa računskog stanovišta ,nešto jednostavniju proceduru predstavlja prilaz s pozicija korišćenja Drazinove inverzije. S dva pažljivo odabrana primera prezentovane su izložene metode i ukazano kako se, za sisteme nižih redova, može odrediti kretanje singularnog linearnog kontinualnog sistema u prostoru stanja.

Dodatak A - Elementarne operacije nad matricama

Tri osnovne operacije koje se nazivaju *elementarnim*, primenjuju se nad matricama. To su:

- Zamena bilo koje vrste ili bilo koje kolone
- Množenje skalarom bilo koje vrste ili kolone
- Množenje skalarom bilo koje vrste ili kolone i dodavanje tako dobijenog rezultata nekoj drugoj vrsti, odnosno koloni. Polazna vrsta, odnosno kolona, ostaje pri tome nepromenjena.

Koristeći sukcesivno navedene elementarne operacije, može se pokazati da se svaka matrica, $rang A = r$, može svesti na jednu od sledećih struktura:

$$I_r, \qquad \begin{bmatrix} I_r & \vert & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} I_r \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dodatak B - Linearni vektorski prostori

Linearni vektorski prostor *X* je skup elemenata, koji se nazivaju vektorima, definisan nad poljem skalarnih brojeva, koji zadovoljava osam postulata operacija sabiranja i množenja skalarom.

Dodatak C - Linearna zavisnost

Definicija C1. Neka je $\mathbf{x}_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots n$, ograničen broj vektora koji pripadaju linearnom vektorskom prostoru *X*. Ukoliko postoji skup od n skalara a_i, od kojih je bar jedan različit od nule, koji zadovoljavaju $\sum a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, onda se vektori zovu linearna zavisnost.

Definicija C2. Za svaki skup vektora $\mathbf{x}_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots n$, koji nije linearno zavisan, kaže se da je linearno nezavisan. To znači da je uslov $\sum a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ zadovoljen samo za $a_i = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots n$.

Linearna zavisnost vrsta, odnosno kolona, date kvadratne matrice može se vrlo lako ispitati određivanjem njene determinante. Za $\det A \neq 0$ vrste, odnosno kolone su linearno nezavisne. Za $\det A = 0$ vrste, odnosno kolone su linearno zavisne.

Dodatak D - Vektorski prostori

Neka je X linearni vektorski prostor, i neka je $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots m$, podskup vektora u X. Kaže se da skup vektora $\mathbf{u}_i$ razapinje (*span*) prostor X ako za svako $\mathbf{x} \in X$ postoji bar jedan skok skalara $a_i \in \mathbf{R}$, koji omogućavaju da se $\mathbf{x}$ izrazi kao linearna kombinacija od $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m ,$$

Bazisni vektori

Skup bazisnih vektora $\mathbf{v}_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots n$, za prostor X, je podskup vektora u X koji:
- razapinju prostor
- koji su linearno nezavisni

Stoga, skup bazisnih vektora se sastoji od *najmanjeg broja vektora neophodnih za razapinjanje prostora.*

Skup bazisnih vektora datog prostora nije jedinstven, ali svaki skup bazisnih vektora ima jednak broj elemenata. Za izabrani bazis prostora X, svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ ima jedinstvenu prezentaciju. Jedan od najpogodnijih bazisnih skupova X^n je prirodan Kartezijanov skup e_i, tj. ortonormirani bazis, čiji su vektori jedinični i uzajamno ortogonalni.

Dimenzija vektorskog prostora

Dimenzija vektorskog prostora X, *u oznaci* $\dim(X)$, *jednaka je broju vektora u bazisnom skupu. Otuda* n-*dimenzionalni linearni vektorski prostor ima* n *bazisnih vektora.*

Suma. Direktna suma.

Za dva data linearna vektorska prostora U i V nad istim poljem brojeva $\Im$, može se formirati novi vektorski prostor X, kao njihova suma:

$$X = U + V$$

To znači, da se svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ može napisati kao:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \ , \quad \mathbf{u} \in U \ , \quad \mathbf{v} \in V$$

Ukoliko postoji jedan i samo jedan par **u**, **v** za svako **x**, tada se X zove direktna suma U i V, u oznaci:

$$X = U \oplus V$$

što implicira da je jedini vektor koji pripada i jednom i drugom prostoru nula vektor:

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\}$$

Dodatak E - Ekvivalentnost predstavljanja singularnih sistema u matričnom zapisu

U razmatranju kanoničkih formi, bio je istaknut značaj mogućih reprezentacija matematičkih modela, a u svetlu nejednoznačnog izbora veličina stanja singularnih sistema, *Debeljković et al. (1996a, 1996b, 1998*). Samim tim, može se uspostaviti veza između oformljenih modela jednog te istog realnog sistema. Analogno tome mogu se formirati i različite kanoničke forme matričnog para *(E,A).* Naredna izlaganja pokazuju da u takvim prilikama, a pod određenim uslovima, postoji ekvivalntnost takvih matričnih zapisa.

Definicija E1. Neka φ označava skup u kome je uspostavljena određena veza (relacija) Γ između bilo koja dva elementa $\Phi_1, \Phi_2 \in \varphi$. Simbol $\Phi_1\tilde{\Gamma}\Phi_2$ koristiće se da predstavi relaciju Γ između elemenata Φ_1 i Φ_2. Ako Γ zadovoljava:

$$\forall \Phi_1 \in \varphi \ , \quad \Phi_1\tilde{\Gamma}\Phi_2 \tag{i}$$

$$\begin{gathered}\forall \Phi_1 \ , \ \Phi_2 \ , \ \Phi_3 \in \varphi \ , \quad \text{ako: } \Phi_1\tilde{\Gamma}\Phi_2 \ , \\ \Phi_2\tilde{\Gamma}\Phi_3 \ , \ \Phi_1\tilde{\Gamma}\Phi_3 \quad \textit{je tačno.}\end{gathered} \tag{ii}$$

$$\begin{gathered}\forall \Phi_1 \ , \ \Phi_2 \in \varphi \ , \quad \text{ako} \quad \Phi_1\tilde{\Gamma}\Phi_2 \\ \text{mora da važi } \Phi_2\tilde{\Gamma}\Phi_1\end{gathered} \tag{iii}$$

Prvi uslov je poznat kao osobina *refleksivnosti*, drugi kao *tranzitivnost* i treći kao osobina *invertibilnosti*.

Posle ovih postulata, relaciji Γ može se pridružiti atribut *ekvivalencije*. Primenjeno na singularne sisteme, pojam ekvivalencije ima sledeći smisao. Naime, posmatrajmo dva singularna sistema opisana svojim jednačinama stanja i jednačinama izlaza:

$$\begin{gathered}E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t)\end{gathered} \tag{E1}$$

i

$$\begin{gathered}\tilde{E}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}_i(t) = \tilde{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)\end{gathered} \tag{E2}$$

Pretpostavimo da postoje dve nesingularne matrice U i V, tako da je:

$$\mathbf{x}(t) = V \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) \tag{E3}$$

$$UEV = \tilde{E} \ , \qquad UAV = \tilde{A} \tag{E4}$$

$$UB = \tilde{B} \ , \qquad CV = \tilde{C} \tag{E5}$$

Po ovakvoj zameni bazisa prostora stanja, odnosno transformaciji koordinatnog sistema, jed. (E3) za sisteme date jed. (E1,E2) kaže se da su *ograničeno sistem ekvivalentni.* U tom smislu pomenuti sistemi poseduju osobine refleksivnosti, invertibilnosti i tranzitivnosti. Samim tim omogućeno je da se polaznom sistemu pridruži niz ekvivalentnih sistema, odnosno kanoničkih formi.

Definicija E2. Dva sistema S_1 i S_2 su *ograničeno sistem ekvivalentn,* ako su njihove *pridružene sistemske matrice* povezane na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE_1 - A_1 & -B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE_2 - A_2 & -B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{E6}$$

gde su U i V nesingularne matrice.

Na osnovu jed. (E6) mogu se formirati različite kanoničke forme singularnih sistema, polazeći od forme S_1 kao bazične.

Literatura

[1] BAJIĆ,V.B. *Lyapunov's Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*,ShadesTechnical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

[2] CAMPBELL,S.L., MEYER,C.D., ROSE,N.J. Application of Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol.31, p.411–425.

[3] CAMPBELL,S.L., *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, Marshfield, Mass., 1980a.

[4] CAMPBELL,S.L., MAYER,JR.D., *Generalized Inverses of Linear Transformation*, Pitman, London, 1980b.

[5] CAMPBELL,S.L., *Singular Systems of Differential Equations II*, Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[6] COĆIĆ,A., *Primena generalisanih inverza u teoriji singularnih sistema.* Diplomski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 2000.

[7] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue on Semistate Systems, 1986**,** vol.5, no.1.

[8] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems,1989, vol.8, no.3.

[9] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *Application of Singular Systems Theory in Chemical Engineering*, MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic, 1996.a.

[10] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *Continuous Singular Control Systems.* GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

[11] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B., JACIĆ,LJ.A. *Discrete Singular Control Systems.* GIP Kultura, Beograd, 1998.

[12] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., DRAKULIĆ,V.Stabilnost linearnih autonomnih singularnih sistema u smislu Ljapunova: Retrospektiva rezultata. *Naučnotehnički pregled,* 2001, no.3, p.70-79.

[13] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., JOVANOVIĆ,M.B., DRAKULIĆ,V. Stabilnost linearnih diskretnih deskriptivnih sistema u smislu Ljapunova: Retrospektiva rezultata. *Naučnotehnički pregled,* 2002 (u štampi).

[14] ĐURIĆ,V.M. *Generalisani inverzi i primene.* Magistarska teza, Filozofski fakultet, Niš, 1987.

[15] LEWIS,F.L. A Survey of linear singular systems", *Circ. Syst. Sig. Proc.*, 1986, vo.5, no.1, p.3–36.

[16] LEWIS,F.L. Recent Work in Singular Systems. *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, 1987, p.20–24.

[17] PAVKOVIĆ,M.B. *Primena generalisanih inverzija u dinamičkoj analizi singularnih sistema.* Mašinski fakultet, Beograd, 1998.

Rad primljen: 22.5.2001.god.